КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

2024-2025 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ

10 класс

На олимпиаде используется 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Критерии оценивания** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 4–5 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. В задаче «Оценка + пример» доказана оценка. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В задаче «Оценка + пример» построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Кроме того,

1. результатом выполнения каждого задания должна быть запись полного решения со всеми необходимыми обоснованиями и выводами; ответ без обоснований (если они требуются) оценивается в 0 баллов;
2. любое правильное (полное) решение оценивается в 7 баллов; недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;
3. олимпиадная работа не является контрольной работой, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
4. баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
5. если к задаче приведены указания к оцениванию – они имеют приоритет над общими указаниями.

**1.** Шесть детей посещают 5 спортивных секций. В каждой секции занимается по 3 ребенка. Могло ли оказаться, что каждые два ребенка вместе посещают хотя бы одну секцию?

***Решение***. Всего в пяти секциях занимаются 15 детей. По принципу Дирихле, есть ребенок, который посещает не более двух из них. Пусть его зовут Андрей. Андрей посещает каждую секцию с двумя другими ребятами, поэтому есть еще хотя бы один ребёнок, который не занимается вместе с Андреем.

**2.** Найдите все функции , удовлетворяющие соотношению  для всех действительных *x*.

***Решение***: Подставим *х* вместо (*x*–1). Получим равенство . Тогда из полученной системы двух функциональных уравнений (умножим второе на *x*, вычтем его из первого) найдём . Проверка показывает, что эта функция подходит, причём она определена при всех действительных *x*, т.к. знаменатель не обращается в 0.

**3.** В каждой белой клетке доски 8 × 8 для шахмат сидит черепашка. Раз в час каждая черепашка переползает в какую-нибудь соседнюю по вершине (но не по стороне) клетку. В одной клетке могут находиться несколько черепах. Какое наибольшее число черепашек может через некоторое время оказаться в одной клетке?

***Решение***: Ответ. 16.

Заметим, что в каждый момент времени все черепашки будут находиться в белых клетках доски. Раскрасим все такие клетки в два новых цвета следующим образом: клетки первой, третьей, пятой, седьмой строки — в первый цвет, а все остальные — во второй. Заметим, что на клетках каждого цвета всегда будет находиться ровно по 16 черепашек. Действительно, в начальный момент это так, а при каждом ходе каждая черепаха меняет свой цвет. Отсюда следует, что больше 16 черепашек не могут собраться в одной клетке.

Осталось привести пример, когда 16 черепашек соберутся в одной клетке. Выберем произвольную клетку первого цвета, и пусть все черепахи ползут в одну клетку. Когда черепаха приползет в эту клетку, она будет идти в произвольную соседнюю клетку, а затем возвращаться обратно. Тогда через некоторое количество ходов действительно 16 черепашек соберутся в выбранной клетке.

***Комментарий***:

* Доказано, что не более 16 черепах могут оказаться в одной клетке – 6 баллов,
* Приведен пример, где 16 черепах соберутся в одну клетку – 4 балла.

**4.** К окружности проведены касательные в точках *A* и *B*, пересекающиеся в точке *P*. Через точку *P* проведена секущая, пересекающая окружность в точках *K* и *L*. Пусть *M* — середина хорды *KL*. Через точку *A* проведена хорда *AE* параллельно *KL*. Докажите, что *BE* проходит через *M*.

***Решение****:* докажем что, точки *APBM* на одной окружности. Проведем *ОP*, где *О* – центр окружности. Отрезок *OP* виден под прямым углом из точек *A*, *M* и *B*.

∠*PAB* = ∠*PBA* = ∠*BMP* = ∠*AMP* (симметрия и вписанные углы). ∠*AEB* = ∠*BAP* (угол между хордой и касательной). Отсюда – прямые *EB* и *MB* образуют равные углы для *EA*║*KL*. Следовательно, *EB*║*MB* и *E*, *M*, *B* на одной прямой.

**5.** Для каждого натурального *n* докажите, что 

***Решение***:

*Первое решение*:

Требуемое неравенство равносильно следующему: . Выполнение этого неравенства очевидно: правую часть можно трактовать как количество способов выбрать 2*п* элементов из 5*п*, а левую – как некоторое подмножество этих способов, когда мы разбиваем все 5*п* элементов на *п* групп по 5 элементов и из каждого из них выбираем по 2 элемента.

*Второе решение*:

Докажем индукцией по *п*. При *п* = 1 неравенство 10·6·2 ≤ 120 верно.

Далее, для индукционного перехода достаточно доказать, что

.

После сокращения на  получаем:



